Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus

Hannover, 8.02.2002

Klausur

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	

Aufgabe	1		2				3			4		Summe
	a	b	a	b	c	d	a	b	c	a	b	
mögliche Punkte	3	3	1	3	3	2	3	3	3	3	3	30
erreichte Punkte												

1. In einer Urne befinden sich 5 rote, 4 blaue und 3 schwarze Kugeln. Es werden 4 Kugel ohne Zurücklegen gezogen.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

   a) mindestens eine blaue Kugel und mindestens eine schwarze Kugel gezogen werden?

   b) mindestens eine Kugel von jeder Farbe gezogen wird?

2. Es seien A, B Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es sei

   $$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

   a) Welches Ereignis wird durch $A \Delta B$ beschrieben?

   b) Die Ereignisse A, B seien unabhängig, und es sei $p = P(A) = P(B)$. Für welche Werte $p \in [0, 1]$ sind A und $A \Delta B$ unabhängig?

   c) Zeigen Sie: Aus $P(A \Delta B) = 0$ folgt $P(A) = P(B)$.

   d) Beweisen oder widerlegen Sie: Aus $P(A) = P(B)$ folgt $P(A \Delta B) = 0$.

3. a) Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

   $$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x, y \geq 0, \ x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

   b) Eine Schraube besitze die gewünschte Qualität, wenn die Abweichung ihrer Länge vom Nennwert dem Absolutbetrag nach 2,3 μm nicht überschreitet. Für jede gefertigte

Schraube sei die zufällige Abweichung der Abmessung der Schraubenlänge vom Nennwert normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 μm und der Varianz 4 μm^2. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Schrauben mit der gewünschten Qualität, wenn vier Schrauben hergestellt werden.

c) Es sei X Poissonverteilt mit dem Erwartungswert $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\frac{1}{1+X}$.

4. a) Ist

$$f(t) = \frac{1}{2}t(t+1), \ |t| \leq 1,$$

die erzeugende Funktion einer nicht negativen ganzzahligen Zufallsvariable X? Bestimmen Sie gegebenenfalls $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

b) Ein Spieler wirft solange unbhängig einen Würfel, bis zum ersten Mal die Augenzahl "Sechs" erscheint. Benötigt er dazu eine ungerade Anzahl von Versuchen, so erhält er a Euro (Gewinn $= a$), anderfalls muß er b Euro zahlen (Gewinn $= -b$). Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl "Sechs" bei einem einzelnen Würfelwurf sei $p \in (0,1)$. Welche Beziehung muß zwischen a, b und p bestehen, damit für den Spieler der Erwartungswert des Gewinns 0 ist?

Universität Hannover

Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. L. Baringhaus

Hannover, 18.07.1997

Lösungen der Klausuraufgaben zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinichkeitstheorie und Statistik A

WS 2001/02

1. a) Mit A als Ereignis, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, B als Ereignis mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen, ist gesucht

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= 1-P(A^c)-P(B^c)+P(A^c\cap B^c)\\ &= 1-\frac{\binom{8}{4}}{\binom{12}{4}}-\frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}}+\frac{\binom{5}{4}}{\binom{12}{4}}=\frac{304}{495}.\end{aligned}$$

b) Es sei A das Ereignis, zwei schwarze, eine blaue und eine rote Kugel zu ziehen, B das Ereignis, zwei blaue, eine schwarze und eine rote Kugel zu ziehen, C das Ereignis, zwei rote, eine blaue und eine schwarze Kugel zu ziehen. Mindestens eine Kugel von jeder Farbe wird genau dann gezogen, wenn eines der paarweise sich ausschließenden Ereignisse A, B, C eintritt. Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}}+\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{4}}=\frac{6}{11}.$$

2. a) Das Ereignis $A\Delta B$ tritt genau dann ein, wenn entweder A oder B eintritt.

b) Es ist $P\big((A\Delta B)\cap A\big)=P(A\cap B^c)=p(1-p)$, $P(A\Delta B)=2p(1-p)$, also

$$P\big((A\Delta B)\cap A\big)=P(A\Delta B)P(A)$$

genau dann, wenn $p(1-p)=2p^2(1-p)$ oder äquivalent $p\in\{0,\frac{1}{2},1\}$ ist.

c) Es ist $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$, $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)$. Aus $0=P(A\Delta B)$ folgt $P(A\cap B^c)=0=P(B\cap A^c)$, also $P(A)=P(A\cap B)=P(B)$.

d) Die Aussage ist zu widerlegen. Mit $\Omega=\{0,1\}, \mathfrak{A}=\mathfrak{P}(\Omega)$, $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{2}|A|$ für $A\in\mathfrak{A}$ ist für $A=\{0\}$, $B=\{1\}$, $A\Delta B=\Omega$, also $P(A)=P(B)$ und $P(A\Delta B)=1$.

3. a) Es ist

$$E(X)=2\int_0^1 x\Big[\int_0^{1-x}dy\Big]\,dx=2\int_0^1 x(1-x)\,dx=1/3.$$

b) Sei A_i das Ereignis, daß die i-te gefertigte Schraube den Qualitätsanforderungen genügt, $i=1,\dots,4$, $X=I_{A_1}+\cdots+I_{A_4}$. Mit $X_i\sim N(0,4)$, $i=1,\dots,4$, also $\frac{1}{2}X_i\sim N(0,1)$ ist

$$P(A_i)=P(|X_i|\le 2{,}3)=P(\frac{1}{2}|X_i|\le 1{,}15)=2\Phi(1{,}15)-1,$$

also $E(X)=4\Big(2\Phi(1{,}15)-1\Big)\approx 3.$

c)

$$E(\frac{1}{1+X}) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

4. a) Es ist f die erzeugende Funktion von $1+X$ mit $X \sim \mathfrak{B}(1, \frac{1}{2})$. Es ist $E(X) = \frac{3}{2}$ und $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$.

b) Mit $X \sim \mathrm{Nb}(1,p)$ auf $\mathbb{N}$ ist der Gewinn

$$G = a\sum_{k=1}^{\infty} I(X=2k-1) - b\sum_{k=1}^{\infty} I(X=2k),$$

also

$$\begin{aligned} E(G) &= ap\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k-2} - bp(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k-2} \\ &= ap\left(1-(1-p)^2\right)^{-1} - bp(1-p)\left(1-(1-p)^2\right)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $a = b(1-p)$ ist.